ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ DUNG

PHƯƠNG PHÁP ĐIỂM GẦN KỀ GIẢI MỘT BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN HỖN HỢP DC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ DUNG

PHƯƠNG PHÁP ĐIỂM GẦN KỀ GIẢI MỘT BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN HỖN HỢP DC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. Lê Dũng Mưu

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Lời mở đầu **ii**

1 Kiến thức cơ bản về hàm lồi và tập lồi **1**

1.1 Tập lồi và tập lồi đa diện 1

1.2 Hàm lồi 4

1.3 Dưới vi phân 6

1.4 Tính đơn điệu 7

2 Bài toán bất đẳng thức biến phân **9**

2.1 Phát biểu bài toán và ví dụ 9

2.2 Môt số tính chất 10

2.2.1 Sự tồn tại nghiệm 10

2.2.2 Các bài toán liên quan 15

3 Bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp DC **19**

3.1 Hàm DC 19

3.2 Phát biểu bài toán và ví dụ 23

3.3 Phương pháp điểm gần kề giải bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp DC 24

3.4 Một mô hình cân bằng bán độc quyền 33

Kết luận **36**

Tài liệu tham khảo **37**

Lời mở đầu

Bất đẳng thức biến phân là một bài toán quan trọng trong toán học ứng dụng. Do đó bài toán này đã được nhiều người quan tâm nghiên cứu.

Trong hướng nghiên cứu này, phương pháp điểm gần kề giải một bài toán bất đẳng thức biến hỗn hợp DC là một đề tài quan trọng. Mục đích của luận văn này là tập trung giới thiệu trình bày về bài toán bất đẳng thức biến phân, một số tính chất về tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân. Đặc biệt đi sâu vào việc giới thiệu phương pháp giải lớp bài toán này. Luận văn bao gồm 3 chương.

Chương 1: Các kiến thức cơ bản về giải tích lồi, chương này nhắc lại và trình bày các khái niệm, định lý, tính chất dùng để nghiên cứu bài toán bất đẳng thức biến phân ở chương sau.

Chương 2: Bài toán bất đẳng thức biến phân, chương này trình bày định nghĩa về bài toán bất đẳng thức biến phân và các ví dụ. Đồng thời cũng trình bày về sự tồn tại và tính chất tập nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$.

Chương 3: Trình khái niệm, tính chất hàm DC, phương pháp điểm gần kề giải một bài toán bất đẳng thức biến hỗn hợp DC.

Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới thầy giáo hướng dẫn GS. TSKH. Lê Dũng Mưu, người thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình làm và hoàn thiện luận văn.

Tôi cũng xin kính gửi lời cảm ơn tới các thầy, các cô trong Khoa Toán - Tin, các bạn sinh viên trong lớp cao học toán K8A, trường Đại học Khoa học đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên, và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại trường. Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân đã luôn khuyến khích, động viên giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học cao học và hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, 2016 **Nguyễn Thị Dung**

Học viên Cao học Toán K8A,

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Chương 1

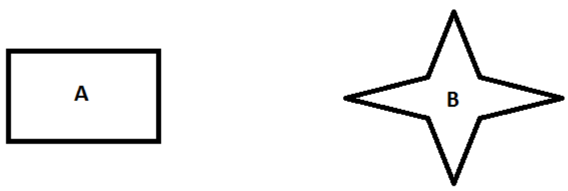
Kiến thức cơ bản về hàm lồi và tập lồi

Dưới đây, ta nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản của giải tích lồi như: Tập lồi, hàm lồi, dưới vi phân,.... Các kiến thức trong chương này được lấy chủ yếu từ các tài liệu ([1]), ([3]) và sẽ được sử dụng ở các chương sau.

1.1 Tập lồi và tập lồi đa diện

Cho hai điểm $a, b \in \mathbb{R}^n$. Tập tất cả các điểm $x = (1-\lambda)a + \lambda b$ với $\lambda \in [0, 1]$ gọi là đoạn thẳng (đóng) nối a, b và được kí hiệu là $[a, b]$.

Định nghĩa 1.1. *Một tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một tập lồi nếu nó chứa trọn đoạn thẳng nối hai điểm bất kì thuộc nó. Tức là, nếu $(1-\lambda)a + \lambda b \in C$ với mọi $a, b \in C$ và mọi $\lambda \in [0, 1]$.*



Hình 1.1: Tập A lồi. Tập B không lồi

Định nghĩa 1.2. *Điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng*

$$x = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_k a^k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a^i$$

với

$$a^i \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

được gọi là một tổ hợp lồi của các điểm $a^1, a^2, ..., a^k$.

Tập C là lồi khi và chỉ khi nó chứa mọi tổ hợp lồi của các phần tử thuộc nó.

Thứ nguyên (số chiều) của một tập lồi C, kí hiệu là $dimC$, là thứ nguyên (số chiều) của bao affine của nó. Một tập lồi C trong $\mathbb{R}^n$ gọi là có thứ nguyên đầy nếu $dimC = n$.

Định nghĩa 1.3. *Điểm* $x \in \mathbb{R}^n$ *có dạng*

$$x = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_k a^k$$

và

$$a^i \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

được gọi là tổ hợp affine của các điểm $a^1, a^2, ..., a^k$.

M là một tập affine khi và chỉ khi M chứa mọi tổ hợp affine các phần tử thuộc nó.

Giao của một họ các tập affine cũng là một tập affine.

Cho E là môt tập bất kì trong $\mathbb{R}^n$, có ít nhất một tập affine chứa E, cụ thể là $\mathbb{R}^n$. Một số tập lồi đáng chú ý:

a) Siêu phẳng là tập có dạng

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \alpha,\ a \in \mathbb{R} \backslash \{0\},\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

b) Nửa không gian đóng

$$H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n :\ a^T x \leq \alpha\},\ H_2 = \{x \in \mathbb{R}^n :\ a^T x \geq \alpha\}.$$

c) Nửa không gian mở

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n :\ a^T x < \alpha\},\ K_2 = \{x \in \mathbb{R}^n :\ a^T x > \alpha\}.$$

d) Hình cầu đóng

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}, a \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$$

e) Tập lồi đa diện

$D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, trong đó $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m$.

f) Nón lồi đa diện

$K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$, trong đó $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ 0 \in \mathbb{R}^m$.

Từ định nghĩa tập lồi trực tiếp suy ra một số tính chất đơn giản sau:

a) Giao của một họ bất kì các tập lồi là tập lồi.

b) Tổng, hiệu hai tập lồi cũng là tập lồi

$$C \pm D = \{x \pm y : x \in C, y \in D\}$$

c) Nếu $C \subset \mathbb{R}^m, D \subset \mathbb{R}^n$ thì tích $C \times D = \{(x,y) : x \in C, y \in D\}$ là một tập lồi trong $\mathbb{R}^{m \times n}$. (Có thể mở rộng cho tích của nhiều tập lồi).

Định nghĩa 1.4. *Cho E là một tập bất kì trong $\mathbb{R}^n$.*

a) Giao của một tập affine chứa E gọi là bao affine của E, kí hiệu là affE. Đó là tập affine nhỏ nhất chứa E.

b) Giao của tất cả các tập lồi chứa E gọi là bao lồi của E, kí hiệu là $conE$. Đó là tập lồi nhỏ nhất chứa E.

Định nghĩa 1.5. *Một tập con K của $\mathbb{R}^n$ được gọi là một nón hay tập nón nếu với mọi $x \in K$ và mọi $\lambda > 0$ thì $\lambda x \in K$. Nón K được gọi là một nón lồi nếu K là tập lồi.*

Định nghĩa 1.6. *Một tập là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng gọi là một tập lồi đa diện. Nói cách khác, đó là tập nghiệm của một hệ hữu hạn bất phương trình tuyến tính:*

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, 2, ..., m$$

nghĩa là tập các x nghiệm đúng $Ax \leq b$ với $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b = (b_1, ..., b_m)^T$.

Nhận xét 1.7. *Vì một phương trình tuyến tính có thể biểu diễn tương đương bằng hai bất phương trình tuyến tính nên tập nghiệm của một hệ (hữu hạn) phương trình và bất phương trình tuyến tính cũng là một tập lồi đa diện.*

Một tập lồi đa diện có thể không bị chặn (không giới nội). Một tập lồi đa diện bị chặn (giới nội) còn được gọi là một đa diện lồi.

Định nghĩa 1.8. *Ta nói hai tập lồi khác rỗng C, D trong $\mathbb{R}^n$ tách được bởi siêu phẳng $H = \{ x \in \mathbb{R}^n : \langle t, x\rangle = \alpha\}$, $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$, nếu*

$$\inf_{x\in C} \langle t, x\rangle \geq \alpha \geq \sup_{y\in D} \langle t, y\rangle . \tag{1.1}$$

Định lý 1.1. *(Định lý tách I). Hai tập lồi C và D trong $\mathbb{R}^n$ khác rỗng, không có điểm chung có thể tách được bởi một siêu phẳng, nghĩa là tồn tại vectơ $t \in \mathbb{R}^n (t \neq 0)$ và một số $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho* (1.1) *thỏa mãn.*

Định nghĩa 1.9. *Ta nói hai tập lồi khác rỗng C, D trong $\mathbb{R}^n$ là tách hẳn bởi siêu phẳng $H = \{ x \in \mathbb{R}^n : \langle t, x\rangle = \alpha\}$, $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$, nếu*

$$\inf_{x\in C} \langle t, x\rangle > \alpha > \sup_{y\in D} \langle t, y\rangle . \tag{1.2}$$

Định lý 1.2. *(Định lý tách II). Hai tập lồi đóng C và D trong $\mathbb{R}^n$ khác rỗng, không cắt nhau với ít nhất một trong hai tập này là compact, có thể tách hẳn bởi một siêu phẳng, nghĩa là tồn tại một vectơ $t \in \mathbb{R}^n (t \neq 0)$ và một số $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho* (1.2) *thỏa mãn.*

1.2 Hàm lồi

Định nghĩa 1.10. *Hàm $f : S \to (-\infty, +\infty]$ xác định trên một tập hợp lồi $S \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một hàm lồi trên S nếu với mọi $x^1, x^2 \in S$ và mọi số thực $\lambda \in [0, 1]$ ta có*

$$f\left[(1-\lambda) x^1 + \lambda x^2\right] \leq (1-\lambda) f\left(x^1\right) + \lambda f\left(x^2\right).$$

- *Hàm f được gọi là lồi chặt trên S nếu với mọi $x^1, x^2 \in S,\ x^1 \neq x^2$ và mọi $\lambda \in (0, 1)$ ta có*

$$f\left[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2\right] < (1-\lambda) f\left(x^1\right) + \lambda f\left(x^2\right).$$

Hiển nhiên một hàm lồi chặt là lồi, nhưng điều ngược lại không đúng.

- *Hàm f được gọi là hàm lõm (lõm chặt) trêm S nếu $-f$ là lồi (lồi chặt) trên S, gọi là tuyến tính affine trên S nếu f hữu hạn và vừa lồi vừa lõm trên S. Một hàm affine trên $\mathbb{R}^n$ có dạng $f(x) = \langle a, x\rangle + \alpha$ với $a \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$, bởi vì với mọi $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$ và mọi $\lambda \in [0, 1]$ ta có*

$$f\left[(1-\lambda)x^1 + \lambda x^2\right] = (1-\lambda) f\left(x^1\right) + \lambda f\left(x^2\right).$$

Tuy nhiên, hàm affine không lồi chặt hay lõm chặt.

Định nghĩa 1.11. *Cho hàm bất kì $f : S \to (-\infty, +\infty]$ với $S \subseteq \mathbb{R}^n$, các tập*

$$domf = \{x \in S : f(x) < +\infty\}$$

và

$$epif = \left\{(x, \alpha) \in S \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\right\},$$

được gọi lần lượt là miền hữu dụng và tập trên đồ thị của hàm f. Nếu $domf$ khác rỗng (f không đồng nhất bằng $+\infty$) và $f(x) > -\infty$ với mọi $x \in S$ thì ta nói hàm f là chính thường. Nói cách khác, f chính thường nếu $domf \neq \emptyset$ và f hữu hạn trên $domf$.

Có thể chứng minh rằng hàm f lồi và không nhận giá trị $-\infty$ trên S khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau thỏa mãn

a) Tập trên đồ thị $epif$ là một tập lồi.

b)
$$f\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x^k\right) \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f\left(x^k\right)$$

với mọi $x^k \in S,\ \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k = 1,\ \lambda_k \geq 0$ với mọi k (bất đẳng thức Jensen).